濃度がアレフ1の構造に対するKeislerの同型定理について

後藤 達哉

名古屋大学情報学研究科 博士前期課程 2 年

2021 年 12 月 4 日

数学基礎論若手の会 2021

目次

集合論について

集合論は無限を研究する分野である．

可算濃度を $\aleph_0$ とし，連続体濃度を $\mathfrak{c}$ と書く． 可算濃度の一個次の基数を $\aleph_1$ または ω_1 と書く。

$\aleph_0 < \mathfrak{c}$ は ZFC の定理 (Cantor) だが，$\mathfrak{c}$ が $\aleph_1$ かどうかであるかは ZFC で決定できない (Gödel, Cohen)．

CH (連続体仮説) を $\mathfrak{c} = \aleph_1$ であるという仮説とする．今回は主に連続体仮説が成り立たないところでの話．

超積について

一般に「構造」の列があれば直積をとることができるが，直積はいろんな性質を保つとは限らない (例: 体の直積は体ではない)．構造の直積集合に適切な同値関係を入れ，それで割ったものに構造を入れる．それが超積である．

超積の方法はたとえばコンパクト性定理を証明するときにも使える強力な道具である．

超積はもとの列の成分である構造たちの「一階の論理式で書ける」性質を引きつぐ (例: 体の超積は体)．

超積を定めるときの同値関係は「列の添字集合の上のウルトラフィルター」を決めるごとに定まる．

フィルターの定義

I を無限集合とする．次を満たす $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ を **I 上のフィルター**と言う．

1. $I \in \mathcal{F}$, $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
2. $(\forall X, Y \in \mathcal{F})(X \cap Y \in \mathcal{F})$.
3. $(\forall X \in \mathcal{F})(\forall Y \subseteq I)(X \subseteq Y \to Y \in \mathcal{F})$.

たとえば，$\mathcal{F}_0 = \{X \subseteq [0,1] : X$ は Lebesgue 測度 $1\}$ は $[0,1]$ 上のフィルター．

また，$\mathcal{F}_1 = \{X \subseteq I : I \setminus X$ は有限集合$\}$ は I 上のフィルターである．これを Fréchet フィルターという．

ウルトラフィルターの定義

I を無限集合とする．次を満たすフィルター $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ を I 上のウルトラフィルターと言う．

$$(\forall X \subseteq I)(X \in \mathcal{F} \text{ or } I \setminus X \in \mathcal{F}).$$

たとえば，任意に $i \in I$ を固定したとき，
$\mathcal{F}_i = \{X \subseteq I : i \in X\}$ は I 上のウルトラフィルターである．
このような形のウルトラフィルターは単項ウルトラフィルターといってつまらないものである．

どんな無限集合 I についても，その上の非単項ウルトラフィルターが存在する (sketch: I 上のフィルター全体の集合に包含で順序を入れたとき Zorn の補題によって Fréchet フィルターを包む極大元をとればそれが非単項ウルトラフィルターである)．

以降ウルトラフィルターと言ったら非単項ウルトラフィルターだけを指す．

超積の定義

U を I 上のウルトラフィルターとする．L を一階言語とする．$\langle M_i : i \in I \rangle$ を L 構造の列とする．直積集合 $\prod_{i \in I} M_i$ 上に次の同値関係 $\sim$ を入れる:

$$x \sim y \iff \{i \in I : x(i) = y(i)\} \in U.$$

この同値関係で割った商集合を $\prod_{i \in I} M_i / U$ と書き，超積という．特にすべての構造が同じ場合 $M_i = M$ に M^I/U と書き，超冪という．
この商集合は自然に L 構造となる．たとえば，足し算 $+$ が言語に入っていれば，

$$[x] + [y] = [\langle x(i) + y(i) : i \in I \rangle]$$

などとする．

Keisler の同型定理

定理 (Keisler, 1961)

CH (連続体仮説) を仮定する．このとき任意の可算言語 L と初等同値な L-構造 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ で $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \leq \mathfrak{c}$ なものに対して，ウルトラフィルター U on ω があり，$\mathcal{A}^\omega/U \simeq \mathcal{B}^\omega/U$ となる．

Keislerの同型定理

今後 L は可算言語を走り，U はウルトラフィルター on ω を走るとする．

$$\mathrm{KT}(\kappa) \iff (\forall L)(\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} : L\text{-structures of size } \leq \kappa)$$
$$(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow (\exists U)(\mathcal{A}^\omega / U \simeq \mathcal{B}^\omega / U))$$

とおく．するとさっきの定理は次のように言い換えられる．

定理 (Keisler, 1961)

CH $\implies$ KT($\mathfrak{c}$).

Keislerの同型定理の逆

2021年8月，GolshaniとShelahはKeislerの定理の逆を証明した．

定理 (Golshani–Shelah, 2021)

$\mathrm{KT}(\mathfrak{c}) \implies \mathrm{CH}.$

含意の図

$$
\begin{aligned}
\mathsf{KT}(\kappa) \iff & (\forall L)(\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} : L\text{-structures of size } \le \kappa) \\
& (\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow (\exists U)(\mathcal{A}^\omega / U \simeq \mathcal{B}^\omega / U)) \\
\mathrm{SAT}(\kappa) \iff & (\exists U)(\forall L)(\forall (\mathcal{A}_i)_{i\in\omega} : \text{seq. of L-str. of size} \le \kappa)(\prod_{i\in\omega} \mathcal{A}_i / U\text{: saturated})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CH} \arrow[rr] \arrow[dd, equal] \arrow[dddr] & & \mathrm{MA} \arrow[d] \\
& & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} \wedge 2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{SAT}(\mathfrak{c}) \arrow[r, equal] \arrow[dd, equal] & \mathrm{SAT}(\aleph_1) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{SAT}(\aleph_0) \arrow[d, Rightarrow] \\
& \begin{array}{c} \mathsf{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} \\ \wedge\ \mathsf{cf}(\mathfrak{c}) = \aleph_1 \end{array} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} \arrow[d] \\
\mathsf{KT}(\mathfrak{c}) \arrow[r] & \mathsf{KT}(\aleph_1) \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathsf{KT}(\aleph_0) \arrow[d, Rightarrow] \\
& \mathfrak{b} = \aleph_1 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \le \mathfrak{d}
\end{tikzcd}
$$

$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ や $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ などは**基数不変量**というもので，$\aleph_1$ 以上 $2^{\aleph_0}$ 以下の定義可能な基数である．

$\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ と $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ の定義

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) := \min\{\kappa \text{ 基数} : (A_i)_{i<\kappa} \text{という } \mathbb{R} \text{ 内の内部が空な閉集合の列で } \bigcup_{i<\kappa} A_i = \mathbb{R} \text{ なものが存在 }\}$$

$$\mathrm{cof}(\mathcal{N}) := \min\{\kappa \text{ 基数} : (A_i)_{i<\kappa} \text{という } \mathbb{R} \text{ 内の Lebesgue 測度 0 集合の列で } [\forall B \subseteq \mathbb{R} \text{Lebesgue 測度 0 } \exists i < \kappa\ (B \subseteq A_i)] \text{ となるものが存在 }\}$$

Cichoń の図式

代表的な基数不変量の ZFC で示せる不等式は次の Cichoń の図式で描かれている．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

ただし，$A \to B$ は $A \leq B$ が ZFC で証明できるという意味．

Golshani–Shelah の定理の証明

次の定理の証明のスケッチを与えよう．

定理 (Golshani–Shelah)

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ ならば $\mathrm{KT}(\aleph_1)$.

MA(Cohen) とは

Cohen 半順序を

$$\mathrm{Fn}(\omega,\omega) = \{p : p \text{ は有限な関数で } \mathrm{dom}(p), \mathrm{ran}(p) \subseteq \omega\}$$

として $p, q \in \mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ に対して $q \leq p \Leftrightarrow q$ は p の拡張 と定める．
$D \subseteq \mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ に対して

$$D \text{ が稠密} \Leftrightarrow (\forall p \in \mathrm{Fn}(\omega,\omega))(\exists q \in D)(q \leq p)$$

と定める．
$\mathcal{D}$ を $\mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ の稠密集合の族とする． $x \in \omega^\omega$ が **$\mathcal{D}$ ジェネリック**な実数であるとは

$$(\forall D \in \mathcal{D})(\exists p \in D)(x \text{ は } p \text{ の拡張})$$

となるときと定める．

MA(Cohen) とは

MA(Cohen) は次の主張である:

$$(\forall \mathcal{D} : \mathrm{Fn}(\omega, \omega) \text{ の稠密集合の族 with } |\mathcal{D}| < \mathfrak{c})$$
$$(\exists x \in \omega^\omega)(x \text{ は } \mathcal{D} \text{ ジェネリック})$$

(MA は Martin's axiom の略).

事実

MA(Cohen) $\iff$ $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

$\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ とは

$\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ とは次の主張である:

$$\exists \langle \lambda_i : i < \omega_1 \rangle : \mathfrak{c} \text{ 未満の順序数の列 s.t. } \sup_{i<\omega_1} \lambda_i = \mathfrak{c}.$$

つまり連続体濃度 $\mathfrak{c}$ が ω_1 個の元で近似できるという意味である.

Golshani と Shelah の二つ目の定理

定理 (Golshani–Shelah)

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ ならば $\mathrm{KT}(\aleph_1)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{KT}(\aleph_1) \iff &(\forall L)(\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} : L\text{-structures of size } \leq \aleph_1)\\ &(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow (\exists U)(\mathcal{A}^\omega/U \simeq \mathcal{B}^\omega/U))\end{aligned}$$

Golshani と Shelah の二つ目の定理 証明(1/5)

定理 (Golshani–Shelah)

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ ならば $\mathrm{KT}(\aleph_1)$.

(sketch) M^0, M^1 を可算言語上のサイズ $\leq \aleph_1$ の初等同値な構造とする．ウルトラフィルター U と $(M^0)^\omega, (M^1)^\omega$ の枚挙 $\langle g^0_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$, $\langle g^1_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ であって

$$(M^0)^\omega/U \to (M^1)^\omega/U; [g^0_\alpha] \mapsto [g^1_\alpha]$$

が同型写像になるものを構成する．そのためにはŁoś の定理より，任意の L 論理式 φ と $\beta_1, \dots, \beta_n < \mathfrak{c}$ について

$$\{k \in \omega : M^0 \models \varphi(g^0_{\beta_1}(k), \dots, g^0_{\beta_n}(k)) \Leftrightarrow M^1 \models \varphi(g^1_{\beta_1}(k), \dots, g^1_{\beta_n}(k))\} \in U$$

となればよい．

Golshani と Shelah の二つ目の定理 証明(2/5)

定理 (Golshani–Shelah)

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ ならば $\mathrm{KT}(\aleph_1)$.

(続き) これを達成するために，列 $\langle U_\alpha, g^0_\alpha, g^1_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ を帰納的に構成していき，$\langle U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ はフィルターの増大列であり，$\beta_1, \dots, \beta_n \leq \alpha$ ならば

$$\{k \in \omega : M^0 \models \varphi(g^0_{\beta_1}(k), \dots, g^0_{\beta_n}(k)) \\ \Leftrightarrow M^1 \models \varphi(g^1_{\beta_1}(k), \dots, g^1_{\beta_n}(k))\} \in U_{\alpha+1}$$

となるようにする．

Golshani と Shelah の二つ目の定理 証明(3/5)

定理 (Golshani–Shelah)

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ ならば $\mathrm{KT}(\aleph_1)$.

(続き) これを構成するために，$l < 2$ について $\langle M^l_i : i < \omega_1 \rangle$ という M^l の初等鎖で各 M^l_i は可算なものをとる．$\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \aleph_1$ を目撃する列 $\langle \lambda_i : i < \omega_1 \rangle$ を取っておく．$\alpha < \lambda_i$ なるステージではモデル M^0_i, M^1_i を見る．往復論法によって g^0_α, g^1_α を構成していく．$\langle f^l_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \rangle$ を $f^l_\alpha \in (M^l_i)^\omega$ for $\alpha < \lambda_i$ なる $(M^l)^\omega$ の枚挙としておく．

Golshani と Shelah の二つ目の定理 証明(4/5)

定理 (Golshani–Shelah)

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ ならば $\mathrm{KT}(\aleph_1)$.

(続き) $\alpha < \lambda_i$ が偶数ステップならば，$g^0_\alpha \in (M^0_i)^\omega$ はまだ並べていない最小の元とする．それの飛ぶ先 g^1_α は MA(Cohen) から得られるジェネリック実数で定める．ただし稠密集合たちは「だいたい」次で与える：

$$\begin{aligned} D_{A,\varphi,\beta_1,\dots,\beta_n} = \{p \in \mathrm{Fn}(\omega,\omega) :& (\exists k \in \mathrm{dom}(p) \cap A) \\ & (M^0_i \models \varphi(g^0_{\beta_1}(k), \dots, g^0_{\beta_n}(k), g^0_\alpha(k)) \\ & \Leftrightarrow M^1_i \models \varphi(g^1_{\beta_1}(k), \dots, g^1_{\beta_n}(k), p(k)))\} \end{aligned}$$

ただし $A \in U_\alpha$, φ は L 論理式，$\beta_1, \dots, \beta_n < \alpha$． □

Golshani と Shelah の二つ目の定理 証明(5/5)

定理 (Golshani–Shelah)

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ ならば $\mathrm{KT}(\aleph_1)$.

(続き) ジェネリック性より

$$\{k \in \omega : M_i^0 \models \varphi(g^0_{\beta_1}(k), \dots, g^0_{\beta_n}(k)) \\ \Leftrightarrow M_i^1 \models \varphi(g^1_{\beta_1}(k), \dots, g^1_{\beta_n}(k))\}$$

をフィルターに加えてもフィルターであることは壊れないことが分かる．奇数ステージでは 0 と 1 を入れ替えて上と同じ構成をする． □

Golshani と Shelah の三つ目の定理

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ や $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ は $\mathrm{KT}(\aleph_1)$ を成り立たせるために必要な条件だろうか？

$\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \omega_1$ が必要でないことは Golshani と Shelah 自身が示している．

定理 (Golshani–Shelah)

$\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ とする．このとき λ 個の Cohen 実数を追加する強制法により得られるモデルで $\mathrm{KT}(\aleph_1)$ が成り立っている．

(sketch) $\mathrm{MA}(\mathrm{Cohen})$ で存在が保証される実数の代わりに Cohen 実数を使う． □

私たちの結果

$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ も必要ではない！

定理 (G.)

ZFC の無矛盾性を仮定すると ZFC と次の主張を合わせたものも無矛盾である：

$$\neg\mathrm{CH} \text{ かつ } \mathsf{KT}(\aleph_1) \text{ かつ } \mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \aleph_1$$

(sketch) $\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH}$ のモデルから初めて，次の有限台反復強制 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を考える．

$$\Vdash_\alpha \dot{\mathbb{Q}}_\alpha = \mathbb{C}_{\omega_2} \ (\alpha \text{ even})$$

$$\Vdash_\alpha \dot{\mathbb{Q}}_\alpha = \mathbb{A} \ (\alpha \text{ odd})$$

ただし，$\mathbb{C}_{\omega_2}$ は ω_2 個の Cohen 実数を付け加える強制法で，$\mathbb{A}$ はアメーバ強制法と呼ばれる半順序集合である．この強制法で得られるモデルが欲しいモデルである． $\square$

今後の課題

プレプリントの Ver. 1 では以下を未解決問題として挙げていた．

6. Open questions

Question 6.1. (1) Can SAT and $\mathrm{KT}(\aleph_0)$ be separated?

(2) Does $\mathrm{cov}(\mathrm{meager}) = \mathfrak{c} \wedge \mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \aleph_1$ imply SAT?

(3) In connection with item 1 and 2, does SAT hold in a model obtained by adding $\aleph_{\aleph_1}$ Cohen reals to a model of CH?

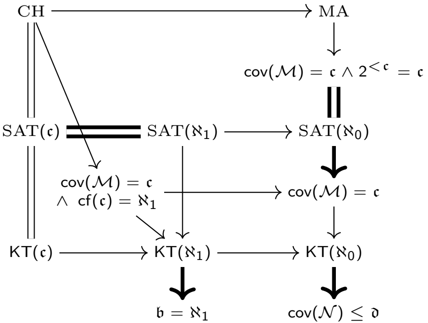
(4) Does SAT hold in a model added $\aleph_2$ Cohen reals to a model of $\mathrm{CH} + 2^{\aleph_1} = \aleph_3$?

(5) Can we force $\mathrm{KT}(\aleph_0)$ without adding Cohen reals?

(6) Does $\mathrm{KT}(\aleph_1)$ imply a stronger hypothesis than $\mathfrak{b} = \aleph_1$? Especially does $\mathrm{KT}(\aleph_1)$ imply $\mathrm{non}(\mathrm{meager}) = \aleph_1$?

(7) Does $\mathrm{KT}(\aleph_1)$ imply a hypothesis that some cardinal invariant is large?

今後の課題



1. $\mathrm{KT}(\aleph_1)$ から $\mathfrak{b} = \aleph_1$ より強い仮説は出るか？特に $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \aleph_1$ は出るか？
2. $\mathrm{KT}(\aleph_0)$ から $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{d}$ より強い仮説は出るか？特に $\mathrm{non}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ は出るか？
3. Sacks モデルで $\mathrm{KT}(\aleph_0)$ は成立しているか？

参考文献

[She92] Saharon Shelah. "Vive la différence I: Nonisomorphism of ultrapowers of countable models". In: *Set theory of the continuum*. Springer, 1992, pp. 357–405.

[GS21] Mohammad Golshani and Saharon Shelah. *The Keisler-Shelah isomorphism theorem and the continuum hypothesis*. 2021. arXiv: `2108.03977 [math.LO]`.

[Kei61] H Jerome Keisler. "Ultraproducts and elementary classes". PhD thesis. University of California, Berkeley, 1961.

[ER72] Erik Ellentuck and R v B Rucker. "Martin's Axiom and saturated models". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 34.1 (1972), pp. 243–249.

私たちのプレプリント: arXiv:2109.04438 [math.LO].

私たちの定理を証明する際，Jörg Brendle **氏にアイディアを頂いた．**