超冪の同型と基数不変量

後藤達哉

名古屋大学情報学研究科 博士前期課程 2 年

2021 年 9 月 4 日

モデル理論夏の学校 2021

Keislerの定理

$\mathfrak{c} := 2^{\aleph_0}$ と書く．

定理 (Keisler, 1961)

CH (連続体仮説) を仮定する．このとき任意の可算言語 L と初等同値な L-構造 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ で $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \leq \mathfrak{c}$ なものに対して，ウルトラフィルター U on ω があり，$\mathcal{A}^\omega / U \simeq \mathcal{B}^\omega / U$ となる．

Keisler の定理

今後 L は可算言語を走り，U はウルトラフィルター on ω を走るとする．

$$\begin{aligned}\mathrm{KT}(\kappa) \iff & (\forall L)(\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} : L\text{-structures of size } \leq \kappa) \\ & (\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow (\exists U)(\mathcal{A}^\omega / U \simeq \mathcal{B}^\omega / U))\end{aligned}$$

とおく．するとさっきの定理は次のように言い換えられる．

定理 (Keisler, 1961)

$\mathrm{CH} \implies \mathrm{KT}(\mathfrak{c})$.

Keislerの定理の逆

2021年8月(!)，GolshaniとShelahはKeislerの定理の逆を証明した．

定理 (Golshani–Shelah, 2021)

$\mathrm{KT}(\mathfrak{c}) \implies \mathrm{CH}.$

含意の図

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{MA}(\sigma\text{-centered}) \arrow[r] \arrow[d, "\text{Ellentuck–Rucker 1972}"'] & \begin{array}{c}\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} \\ \wedge\ \mathfrak{c}^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}\end{array} \arrow[dl, "\text{G.}"'] \\
\mathrm{CH} \arrow[urr, bend left] \arrow[r] \arrow[dd, shift left, "\text{Keisler 1961}"] & \begin{array}{c}\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} \\ \wedge\ \mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \aleph_1\end{array} \arrow[dd, "\text{Golshani–Shelah 2021}"] \arrow[drr] & \begin{array}{c}(\exists U)(\forall L)(\forall (\mathcal{A}_i)_{i\in\omega} : \text{countable } L\text{-structures}) \\ (\prod_{i\in\omega} \mathcal{A}_i / U : \mathfrak{c}\text{-saturated})\end{array} \arrow[dd] \arrow[dr, "\text{G.}"] & \\
 & & & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} \arrow[dl] \\
\mathrm{KT}(\mathfrak{c}) \arrow[uu, shift left, "\text{Golshani–Shelah 2021}"] \arrow[r] & \mathrm{KT}(\aleph_1) \arrow[r] \arrow[dd, "\text{G.}"] & \mathrm{KT}(\aleph_0) \arrow[dr, "\text{G.}"] \arrow[dd, "\text{Shelah 1992}"'] & \\
 & & & \mathfrak{d} \geq \mathfrak{c}^{\exists} \arrow[dl] \\
 & \mathfrak{b} = \aleph_1 & \mathfrak{d} \geq \mathfrak{v}^{\forall} &
\end{tikzcd}
$$

$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{v}^{\forall}$ や $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ は**基数不変量**というもので，$\aleph_1$ 以上 $2^{\aleph_0}$ 以下の定義可能な基数である ($\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ は後で定義する)．

私の結果

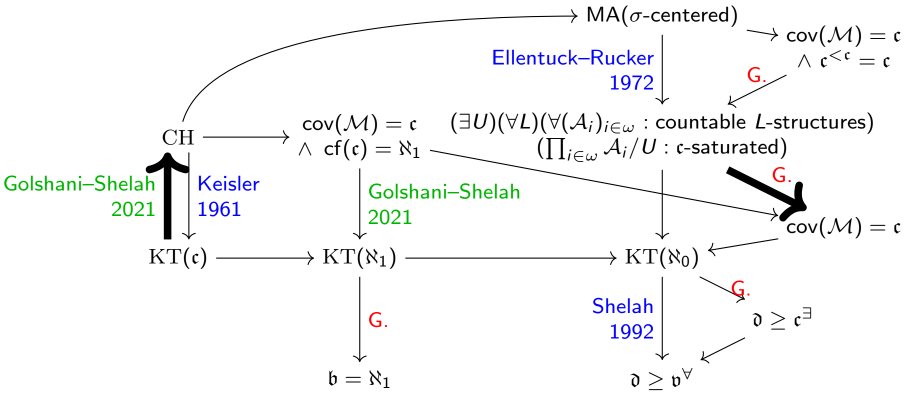
$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) := \min\{\kappa : (A_i)_{i\in\kappa}\text{という }\mathbb{R}\text{ 内の内部が空な閉集合の列で }\bigcup_{i\in\kappa} A_i = \mathbb{R}\text{ なものが存在 }\}$$

命題 (G.)

$(\exists U)(\forall L)(\forall(\mathcal{A}_i)_{i\in\omega}$: 可算 L-構造$)(\prod_{i\in\omega}\mathcal{A}_i/U : \mathfrak{c}$-飽和的$)$ ならば，$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ である．

今日証明する話

Golshani–Shelah による $\mathrm{KT}(\mathfrak{c}) \implies \mathrm{CH}$ と私が示した含意の一つの証明を行う．

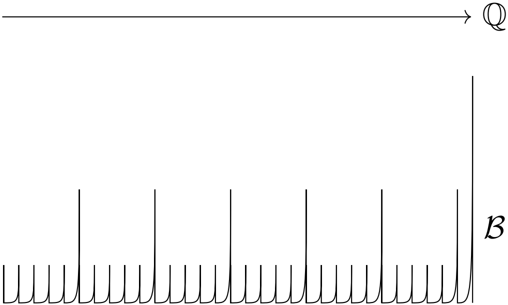


$\mathrm{KT}(\mathfrak{c}) \implies \mathrm{CH}$ の証明

- $\neg\mathrm{KT}(\aleph_2)$ を示せばよい．そこで背理法で $\mathrm{KT}(\aleph_2)$ を仮定する．
- 言語 L を $L = \{<\}$ で定め，$\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, <)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Q} + (\omega_2 + 1) \times \mathbb{Q}_{\geq 0}, <_{\mathcal{B}})$ とする．ただし $<_{\mathcal{B}}$ は辞書式順序と直和順序により定める．
- $|\mathcal{A}| = \aleph_0, |\mathcal{B}| = \aleph_2$ である．
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ はどちらも DLO なため，DLO の完全性より $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は初等同値．
- そこで $\mathrm{KT}(\aleph_2)$ よりウルトラフィルター U と同型写像 $f\colon \mathcal{B}^\omega/U \simeq \mathcal{A}^\omega/U$ がとれる．
- $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^\omega/U, \mathcal{B}^* = \mathcal{B}^\omega/U$ とおく．

KT($\mathfrak{c}$) $\Longrightarrow$ CH の証明

アイディアは $\mathcal{A} = \mathbb{Q}$ は等質的，$\mathcal{B} = \mathbb{Q} + (\omega_2 + 1) \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$ はデコボコしていて，それが超冪に反映されるので，同型でないというものだ．



$\mathrm{KT}(\mathfrak{c}) \implies \mathrm{CH}$ の証明

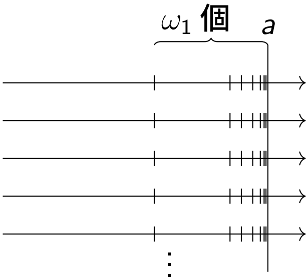
- $\mathcal{B}$ の元 a, b で $\mathrm{cf}(\mathcal{B}_a) = \omega_1, \mathrm{cf}(\mathcal{B}_b) = \omega_2$ なものをとる．ただし
$$\mathcal{B}_c = \{d \in \mathcal{B} : d <_{\mathcal{B}} c\}.$$
- $a_* = [(a, a, a, \dots)]_U, b_* = [(b, b, b, \dots)]_U \in \mathcal{B}^*$ とおく．

KT($\mathfrak{c}$) $\implies$ CH の証明

補題

$\mathrm{cf}((\mathcal{B}^*)_{a_*}) = \omega_1, \mathrm{cf}((\mathcal{B}^*)_{b_*}) = \omega_2$.

$\because$ $\mathrm{cf}(\mathcal{B}_a) = \omega_1$ より単調増加共終列 $(a_i : i < \omega_1)$ をとる．すると $(a_i^* : i < \omega_1)$ where $a_i^* = [(a_i, a_i, a_i, \dots)]_U$ は $(\mathcal{B}^*)_{a_*}$ の共終列である (by ω_1 の正則性)．よって $\mathrm{cf}((\mathcal{B}^*)_{a_*}) = \omega_1$.
$\mathrm{cf}((\mathcal{B}^*)_{b_*}) = \omega_2$ の証明も同様．



$\mathrm{KT}(\mathfrak{c}) \implies \mathrm{CH}$ の証明

- $a_\dagger = f(a_*), b_\dagger = f(b_*)$ とおく．
- 同型写像は共終数を保つので，
  $\mathrm{cf}((\mathcal{A}^*)_{a_\dagger}) = \omega_1, \mathrm{cf}((\mathcal{A}^*)_{b_\dagger}) = \omega_2$ がわかる．

KT($\mathfrak{c}$) $\Longrightarrow$ CH の証明

補題

関数 $F\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$ があって，どんな $c, d \in \mathbb{Q}$ についても $x \mapsto F(x, c, d)$ は $(\mathbb{Q}, <)$ の自己同型で c を d に移す．

$\because$ $F(x, y, z) = x - y + z$ でよい． //

- さて，F から誘導される $(\mathcal{A}^*)^3$ から $\mathcal{A}^*$ への写像を考えると次がわかる:

$$(*) \quad \begin{aligned} &F_*\colon (\mathcal{A}^*)^3 \to \mathcal{A}^* \text{はどんな } c, d \in \mathcal{A}^* \text{についても} \\ &x \mapsto F_*(x, c, d) \text{ は } \mathcal{A}^* \text{の自己同型で } c \text{ を } d \text{ に移す} \end{aligned}$$

- 特に $x \mapsto F_*(x, a_\dagger, b_\dagger)$ は $a_\dagger$ を $b_\dagger$ に移す自己同型なので

$$\mathrm{cf}((\mathcal{A}^*)_{a_\dagger}) = \mathrm{cf}((\mathcal{A}^*)_{b_\dagger}).$$

これは $\mathrm{cf}((\mathcal{A}^*)_{a_\dagger}) = \omega_1, \mathrm{cf}((\mathcal{A}^*)_{b_\dagger}) = \omega_2$ に矛盾． □

私の結果

命題 (再掲) (G.)

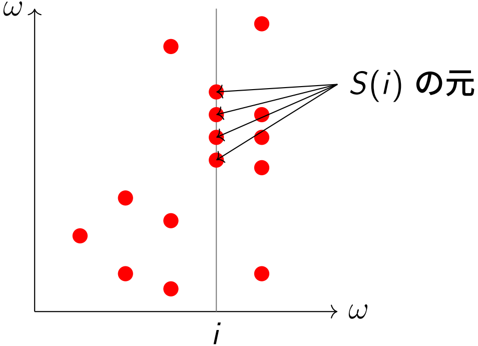
$(\exists U)(\forall L)(\forall (\mathcal{A}_i)_{i\in\omega}$: 可算 L-構造$)(\prod_{i\in\omega} \mathcal{A}_i/U$: $\mathfrak{c}$-飽和的$)$ ならば，$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ である．

私の結果の証明

次の $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ を特徴づける補題を使う．

補題 (Bartoszyński)

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} \iff (\forall X \subseteq \omega^\omega \text{ of size } < \mathfrak{c})(\exists S \in \prod_{i \in \omega} [\omega]^{\leq i})$$
$$(\forall x \in X)(\exists^\infty n)(x(n) \in S(n))$$

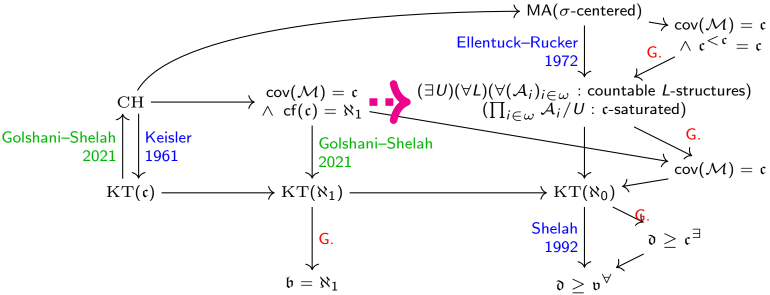


私の結果の証明

- $X \subseteq \omega^\omega$ でサイズ $< \mathfrak{c}$ なものを任意にとる．
- 言語 L は $\{\subseteq\}$ を考え，L-構造 $\mathcal{A}_i$ は $\mathcal{A}_i = ([\omega]^{\leq i}, \subseteq)$ で定める．
- 各 $x \in \omega^\omega$ について $S_x = (\{x(i)\} : i \in \omega)$ とおく．
- 超冪 $\mathcal{A}^* = \prod_{i \in \omega} \mathcal{A}_i / U$ において，変数 S の一変数論理式の集合
$$p = \{[S_x]_U \subseteq S : x \in X\}$$
は有限充足的でパラメータの個数は $< \mathfrak{c}$ である．
- よって命題の仮定 (飽和性) より p を充足する $[S]_U \in \mathcal{A}^*$ がとれる．
- S は $(\forall x \in X)(\exists^\infty n)(x(n) \in S(n))$ を満たしている． $\square$

今後の課題

1. 図の紫線の含意は ZFC の定理か？
2. $\mathrm{KT}(\aleph_0)$ と超積の飽和性は分離できるか？



参考文献 I

[She92] Saharon Shelah. "Vive la différence I: Nonisomorphism of ultrapowers of countable models". In: *Set theory of the continuum*. Springer, 1992, pp. 357–405.

[GS21] Mohammad Golshani and Saharon Shelah. *The Keisler-Shelah isomorphism theorem and the continuum hypothesis*. 2021. arXiv: 2108.03977 [math.LO].

[Kei61] H Jerome Keisler. "Ultraproducts and elementary classes". PhD thesis. University of California, Berkeley, 1961.

[ER72] Erik Ellentuck and R v B Rucker. "Martin's Axiom and saturated models". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 34.1 (1972), pp. 243–249.

Photo by Karl Fredrickson on Unsplash.